Title	談話1031ノ補遺（一次連結局所群ノ separability）
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 240 p.1241-p.1248
Issue Date	1942-08-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74995
rights	
Note	

1063. 談話1031ノ補遺
(一次連結局所群ノ separability)

岩村 聯 (東大學生)

§1. 紙上談話會談話1031定理2デ,「linear continuum L ガ(註1) 右ノ local group ナラバ(註2) L ノ各元 x ニ對シテ左ノ逆元 x^*(註3) ガ存在スレバ, L ハ mod e ノ separable デアルコトヲ述ベマシタ。コノ條件ノ下デ「L ハ separable デアル」コトガワカリマシタカラ以下ソレヲ証明シマス。証明ニハ上ニ言ッタ定理ハ用ヰマセン。

---

(1) 即チ端ノナイ linear order $<$ ガ定義サレタ集合デソノ order topology ニツイテ connected デアルモノ。以下 L ノ topology ハ order topology トスル.

(2) 或ル $x, y \in L$ ニ對シテ積 $xy \in L$ ガ存在シ, 若シ $(xy)z$ 及ビ $x(yz)$ ガ存在スレバ $(xy)z = x(yz)$. 右ノ單位元 e ガアッテ, スベテノ x ニ対シテ xe ガ存在シテ $xe = x$. 或ル x ニ對シテ右ノ逆元 x^{-1} ガアッテ $x^{-1}x = e$. xy ノ存在スルヤウナ pair $\{x, y\}$ 及ビ, x^{-1} ノ存在スルヤウナ z ハ夫々積空間 $L \times L$ 及ビ空間 L ノ開集合ヲ作リ, xy 及ビ z^{-1} ハ $\{x, y\}$ 及ビ z ノ連続函數 (Pontrjagin, Topological groups P. 83 ニ於テ單ニ local group トイハレテヰルモノ)

(3) $x^*x = e$. 然シ x^* ノ連續性ハ假定シナイ。

§2. 先ヅ $\mathfrak{L}$ ガ linear continuum デアルトシマス。

補助定理1. $e \in \mathfrak{L}$ トシ, $(e, +\infty)$ ノ x = 関スル條件 $\mathfrak{b}(x)$ ガ:

P_1 或ル $a > e$ = 對シテハ, スベテノ $x \in (e, a)$ = ツイテ $\mathfrak{b}(x)$ ガ満足サレル. (コレヲ簡單=「(e, a) デ $\mathfrak{b}(x)$ デアル」トイフ).

P_2 (e, a) デ $\mathfrak{b}(x)$ ナラバ a ノ或ル近傍デ $\mathfrak{b}(x)$ デアル。

トイフ性質 P_1 及ビ P_2 ヲ有スレバ, $(e, +\infty)$ デ $\mathfrak{b}(x)$ デアル。

コヽデ $(e, +\infty) = (x;\ e < x)$, $(e, a) = (x;\ e < x < a)$. $\mathfrak{L}$ = 於テ下=有界ナ部分集合=對シテハ, ソレガ空集合デナケレバ, inf. ガ存在シマスカラ, 補助定理1ハ明カデス。

更= $\mathfrak{L}$ ガ右ノ local group デアルトシマス。

端点=$\pm\infty$ ヲモ許シタ区間ヲ廣義ノ区間、端点ガ何レモ $\mathfrak{L}$ ノ元デアルヤウナ区間ヲ單=区間ト呼ビマス。I, J 等ハ e (右ノ単位元) ヲ含ム廣義ノ開区間トシマス。e ヲ含ム或ル開区間ハ実数ノ開区間ト homeomorphic デス, ソノ一ツヲ取ッテ E トシマス. 3箇以上ノ積=括弧ヲツケナイデ書イタトキハ左端カラ順=積ヲ作ッタモノトシマス:
$xyz = (xy)z$ 等。

(注意) 正ノ整数 n ガ與ヘラレタトシマス. $x = \xi_1 \cdots \xi_n$

ナル $e_1, \cdots\cdots, e_n \in E$ ガ存在スルヤウナ x ノ全体ハ，第二可附番性公理ヲ満足スル積空間 $\underbrace{E\times\cdots\cdots\times E}_{n}$ ノ部分集合ノ連續像デスカラ，L ノ separable ナ部分集合トナリマス。從ツテ適當ナ n ニツイテ上ノヤウニ書ケル x ノ全体ノ集合モ separable トナリマス。

定義 「xy ガ定義サレテヰル」コトヲ $x \circ y$ ト書ク。$M, N \subseteq L$ ノトキ $y \in N \to x \circ y$ ヲ $x \circ N$ ト書キ，$x \in N \to x \circ N$ ヲ $M \circ N$ ト記ス。$e < a$ ニ對シテ，

$$I_{(a)} = \bigcup_{a \circ I} I, \quad I^{(a)} = \bigcap_{e < x < a} I_{(x)}$$

ト定メル。但シ $\cup$, $\cap$ ハ夫々集合論的 join 及ビ meet.

明カニ，$M_1 \circ N_1$, $M_2 \circ N_2 \to M_1 \cup M_2 \circ N_1 \cap N_2$ ソシテ $I_{(a)}$ ハ $a \circ I$ ナル I ノ最大ナモノデアリ，$I^{(a)}$ ハ e ヲ含ム廣義ノ区間（又ハ e ノミカラナル集合）デアッテ，$[e, a) \circ I^{(a)}$。又 $e < b < a \to I^{(b)} \supseteq I^{(a)}$ トナルコトモ明カデス。

補助定理2. スベテノ $a > e$ ニツイテ，e ハ $I^{(a)}$ ノ内点デアル。

証明. 「e ハ $I^{(x)}$ ノ内点デアル」ヲ $\mathfrak{P}(x)$ トシテ，補助定理1ヲ適用シマス。e ノ或ル近傍ノ x, y ニツイテハ $x \circ y$ デスカラ $\mathfrak{P}_1$ ハ満足サレテヰマス。次ニ (e, a) デ $\mathfrak{P}(x)$ デアルトシマス。$a \circ e$ デスカラ或ル $(a_1, a_2) \ni a$ 及ビ I ニツイテ $(a_1, a_2) \circ I$. L ハ connected デスカラ $b \in (a_1, a)$ ナル b ガ存在シマス。$(e, b) \cup (a_1, a_2) \circ I^{(b)} \cap I$.

ソコデ, $x=b$ デハ $\mathfrak{L}(x)$ ガ成立シテキルカラ, e ハ $I^{(b)}\frown I$ ノ内点. 即チ $J\subseteq I^{(b)}\frown I$ ナル J ガ存在シマス. コノ J ニツイテハ

$$x\in(e,a_2)\to x\circ I^{(b)}\frown I\to x\circ J\to I_{(x)}\supseteq J.$$

故ニ $I^{(a_2)}\supseteq J.$

故ニ $x\in(a_1,a_2)\longrightarrow I^{(x)}\supseteq I^{(a_2)}\supseteq J\to \mathfrak{L}(x).$

結局, (e,a) デ $\mathfrak{L}(x)$ ナラ a ノ或ル近傍 (a_1,a_2) デ $\mathfrak{L}(x)$. 即チ $\mathfrak{L}(x)$ ハ P_2 ナル性質ヲ有スル. 従ッテ $(e,+\infty)$ デ $\mathfrak{L}(x)$

(証明終)

§3. 更ニ, $\mathfrak{L}$ ノ各元 x ニ對シテ左ノ逆元 x^* ガ存在スルトシマス。

補助定理3. 任意ノ $a>e$ 及ビ I ヲ取ル. $x\in(e,a)$ ナラバ正ノ整数 n 及ビ $\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n\in I$ ガアッテ, $x=\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n$, $\varepsilon_1\cdots\cdots\varepsilon_i\in(e,a)$ $i=1,\cdots\cdots,n$ トナル。

証明. $b\in(e,a)$ トシマス. $\mathfrak{L}$ ハ右ノ local group デ, b ノ左ノ逆元 b^* ガ存在スルカラ, 次ノ如キ J_1, J_2, J 及ビ b ノ近傍 V ヲ取ルコトガ出来マス. (4)ニツイテハ補助定理2参照)

1) $\varepsilon\in J_1\longrightarrow e\circ\varepsilon,\ e\varepsilon=\varepsilon.$

2) $x\in V\longrightarrow b^*\circ x,\ b^*x\in J_1,$

3) $\varepsilon\in J_2\longrightarrow b\circ\varepsilon,\ b\varepsilon\in V,$

4) $J\subseteq J_1\frown J_2\frown I\frown I^{(a)},$

5) $\varepsilon \in J$ ナラ ε^{-1} ガ存在シテ $\varepsilon^{-1} \in J$.

コノ J ニツイテハ

$$\varepsilon \in J \to (e \circ \varepsilon,\ b \circ \varepsilon,\ e\varepsilon = \varepsilon,\ b\varepsilon \in V)$$

$$\to (b^* \circ b\varepsilon,\ (b^* b)\varepsilon = e\varepsilon = \varepsilon) \to b^*(b\varepsilon) = \varepsilon.$$

従ッテ a) $J \ni \varepsilon \neq \varepsilon' \in J \longrightarrow b\varepsilon \neq b\varepsilon'$

b) J ハ廣義ノ開區間, 従ッテ connected

c) $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ continuous.

以上ノ a), b), c) カラ容易ニ次ノコトガ分リマス.

d) bJ ハ connected, $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ strictly monotone, 従ッテ又 bJ ハ b ヲ含ム廣義ノ開區間デアル。

「正ノ整数 n 及ビ $\varepsilon_1, \text{-----}, \varepsilon_n \in I$ ガアッテ, $x = \varepsilon_1 \text{-----} \varepsilon_n$, $\varepsilon_1 \text{-----} \varepsilon_i \in (e, a)$ $i = 1, \text{-----}, n$ トナル」コトヲ $\mathfrak{L}(x)$ ト記シ, linear continuum $(-\infty, a)$ ニ補助定理 I ヲ適用シマス。$\mathfrak{L}(x)$ ガ P_1 ナル性質ヲ有スルコトハ trivial デス. 今 $b \in (e, a)$ トシテ, (e, b) デ $\mathfrak{L}(x)$ デアルトシマス。d) ニヨッテ $b\varepsilon \in (e, b)$ ナル $\varepsilon \in J$ ガ存在シマス. 假定ニヨッテ正整数 $n-1$ 及ビ $\varepsilon_1, \text{-----}, \varepsilon_{n-1} \in I$ ガ存在シテ $b\varepsilon = \varepsilon_1 \text{-----} \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_1 \text{-----} \varepsilon_j \in (e, a)$ $j = 1, \text{----}, n-1$ トナリマス。

今 $\varepsilon_n = \varepsilon^{-1}$ トスレバ $\varepsilon_n \in J \subseteq I^{(a)} \subseteq I^{(b)}$, $b\varepsilon \in (e, b)$ デスカラ $b\varepsilon \circ \varepsilon_n$.

故ニ $b = be = b(\varepsilon\varepsilon^{-1}) = b\varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 \text{-----} \varepsilon_n$,

$\varepsilon_n \in J \subseteq I$. 即チ、$x = b$ ニ於テ $\mathfrak{b}(x)$ ガ成立スル。
再ビ d) ヲ参照スレバ；

$b \in (e, a)$ トシテ、(e, b) デ $\mathfrak{b}(x)$ ナラバ b ノ或ル近傍デ（即チ b_J デ）$\mathfrak{b}(x)$ デアルコトガワカリマス。即チ $\mathfrak{b}(x)$ ハ P_2 ナル性質ヲ有シマス。補助定理1ニヨッテ (e, a) デ $\mathfrak{b}(x)$ デアルコトガ言ハレマスカラ、証明ハ終ッタワケデス。

定理. L ハ separable デアル。

証明. 補助定理3ニ於テ $I = E$ トオケバ、スベテノ $x \in (e, a)$ ニ對シテ、$x = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$ ナル n 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in E$ ガ存在スルコトニナリマス。$e < a$ ハ任意デスカラ、$x \in (e, a)$ ナル條件ハ $x > e$ ナル條件デ置キ換ヘラレマス。$x < e$ ナル x ニツイテモ同様ナコトガ言ヘマス。

即チ任意ノ x ガ上ノヤウナ形ニ書ケマス。§2ノ〔注意〕ニヨッテ、L ハ separable デアルコトガワカリマス。

（証明終）

§4. 「定理2ノ証明」ニ於テ「e ノ或ル近傍 V ト x_0 ヲ含ム或ル開集合 G トガ $x = x_0 y$, $y = x_0^* x$, $y \in V$, $x \in G$ ニヨッテ homeomorphically ニ對應スル」コトハ証明ヲ要スル。（一般ノ local group デハ単ナル α^* ノ存在カラハ証明サレナイカラ）。以下ハソノ証明デアル。先ヅ

(5)' L^* ハ linear continuum, $f(y)$ ハ linear continuum L デ continuous デ $L \ni y_1 \neq y_2 \in L \to L^* \ni f(y_1) \neq f(y_2) \in L^*$, デアルナラバ, $f(y)$ ハ strictly monotone デアル。

証明. $L \ni y_0 < y_1 \in L$ トスル。$f(y_0) < f(y_1)$ トシテモ一般性ヲ觸ケナイ。(5) ニ於テ L ノ代リニ $(y_0, +\infty)$ トシ, $g(y) = f(y_0)$ トシテ見レバ $y_0 < y \to f(y_0) < f(y)$ ガワカル。

同様ニ $y < y_1 \to f(y) < f(y_1)$

コレニヨッテ, 一般ニ L ヲ $y_2 < y_3 \in L \to f(y_2) < f(y_3)$ ガ, 場合ヲ分ケテ考ヘレバ, 容易ニ知ラレル。((5)' 証明終リ)

以下 V_1, V_2 等ハ e ノ近傍, G_1 ハ x_0 ノ近傍トスル。

$x_0 e$, $x_0^* x_0$ ハ存在シテ, $x_0 e = x_0$, $x_0^* x_0 = e$ デアルカラ, V_1, V_2, G_1 ヲ次ノヤウニ取ルコトガ出来ル。

$$\begin{cases} y \in V_1 \text{ ナラ } ey \text{ ガ存在シテ } ey = y \\ x \in G_1 \text{ ナラ } x_0^* x \text{ ガ存在シテ } x_0^* x \in V_1 \\ y \in V_2 \text{ ナラ } x_0 y \text{ ガ存在シテ } x_0 y \in G_1 \end{cases}$$

$V_3 \subseteq V_1 \frown V_2$ トスル。

コノ V_3 ニツイテハ, $y \in V_3$ ナラ ey, $x_0 y$ ガ存在シテ $ey = y$, $x_0 y \in G_1$, 從ッテ $x_0^*(x_0 y)$ ガ存在スル, 從ッテ又 $(x_0^* x_0) y$ ガ存在シテ

$$x_0^*(x_0 y) = (x_0^* x_0) y = ey = y, \qquad (y \in V_3)$$

V_3 ヲ E, $x_0 y$ ヲ $f(y)$, E ヲ E^* ト書キ直シテ見レバ, 上ノ式カラ, $(5)'$ ノ條件ノ成立シテ來ルコトガワカル。從ッテ $x_0 y$ ハ $y \in V_3$ ニ關シテ strictly monotone デアル, ソシテ V_3 ハ connected デアルカラ, $f(V_3)$ ハ x_0 ヲ含ム開區間トナル。

ソコデ $V = V_3$, $G = f(V_3)$ トスレバ $f(y) = x_0 y \in G$, $y \in V$ ニヨッテ V ガ G ニ $1 \sim 1$ ニ寫像サレル, $f(y) = x_0 y$ ハモトヨリ continuous, ソノ逆寫像ハ上式ニヨッテ, $x_0^* x$, $x \in G$ デアルカラ コレモ continuous デアル。コレデ證明ハ終ッタ。